Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $2i(3-i)-6i=2$, unde $i^2=-1$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-mx$, unde m este număr real. Determinați numărul real m pentru care $f(-1)=f(1)$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $27^{x-1}=9^x$.

5p **4.** Determinați probabilitatea ca, alegând un element din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifrele mai mici sau egale cu 3.

5p **5.** În sistemul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,2)$ și $B(1,-1)$. Determinați coordonatele punctului C pentru care $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{BC}$.

5p **6.** Se consideră expresia $E(x)=\sin 2x-2\operatorname{tg}x\cdot\sin\dfrac{2x}{3}$, unde $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$. Arătați că $E\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=0$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și $A(x)=\begin{pmatrix}x&1-x&1\\1-x&x&1\\1&1&0\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=2$.

5p **b)** Arătați că $A(1)\cdot A(x)-A(x-1)=2I_3$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Determinați numărul real x pentru care $A(1)\cdot A(1)\cdot A(x)=3A(1)+2I_3$.

2. Pe mulțimea $M=[0,+\infty)$ se definește legea de compoziție $x*y=\dfrac{xy(x+y)}{xy+1}$.

5p **a)** Arătați că $1*3=3$.

5p **b)** Arătați că $e=1$ este elementul neutru al legii de compoziție „*”.

5p **c)** Determinați perechile (m,n) de numere naturale nenule, cu $m\le n$, pentru care $\dfrac{1}{m}*\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{16}\cdot(m*n)$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2-3x+1}{e^x}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{(x-1)(4-x)}{e^x}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Arătați că axa Ox este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că ecuația $f(x)=n$ are soluție unică, pentru orice număr natural nenul n.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\sqrt{x^2+4}$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^2\frac{f(x)}{\sqrt{x^2+4}}\,dx=2$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^{\sqrt{5}} f(x)\,dx = \frac{19}{3}$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural n, $n \geq 2$, se consideră numărul $I_n = \int_1^2 \frac{x^n}{f^2(x)}\,dx$. Determinați numărul natural n, $n \geq 2$, pentru care $I_{n+2} + 4I_n = \frac{3}{n-1}$.